# Die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

Leitet man die **Sinusfunktion** ab, so erhält man die Kosinusfunktion: Für $f(x) = \sin x$ ist $f'(x) = \cos x$.
Für die **Ableitung der Kosinusfunktion** gilt dagegen: Für $f(x) = \cos x$ ist $f'(x) = -\sin x$.

Für Funktionen der Form $f(x) = 5 \cdot \sin x$ benötigt man für die Ableitung die **Faktorregel**.
Es gilt: $f'(x) = 5 \cdot \cos x$.
Für $f(x) = -\sin x = -1 \cdot \sin x$ gilt daher, dass $f'(x) = -1 \cdot \cos x = -\cos x$.
Für $f(x) = -\cos x = -1 \cdot \cos x$ gilt, dass $f'(x) = -1 \cdot (-\sin x) = \sin x$.
Weitere Beispiele: Für $f(x) = 4 \cdot \cos x$ gilt: $f'(x) = -4 \cdot \sin x$ und für $f(x) = -8\cos x$ gilt: $f'(x) = -8 \cdot (-\sin x) = 8\sin x$.
**Generell gilt:** Bei der Ableitung der Kosinusfunktion ändert sich das Vorzeichen, bei der Ableitung der Sinusfunktion nicht.

$\sin(x) \to \cos(x) \to -\sin(x) \to -\cos(x) \to \sin(x)$

**1** Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $f(x) = -7\sin x$
$f'(x) = -7\cos x$

b) $f(x) = 4\cos x$
$f'(x) = -4\sin(x)$

c) $f(x) = x^2 - 0{,}5\cos(x)$
$f'(x) =$
$f'(x) = 2x + 0{,}5\sin(x)$

d) $f(x) = \sin x - \cos x$
$f'(x) = \cos(x) + \sin(x)$

Für die Funktion f mit $f(x) = \sin(3x^2)$ benötigt man für die Ableitung die **Kettenregel**.
Mit $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$, wobei $u(x) = \sin(x)$ die äußere Funktion und $v(x) = 3x^2$ die innere Funktion ist, erhält man für die Ableitung: $f'(x) = \cos(3x^2) \cdot 6x$.

Die Funktion g mit $g(x) = x^4 \cdot \cos x$ kann man mithilfe der **Produktregel** ableiten.
Mit $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, wobei $u(x) = x^4$ und $v(x) = \cos x$ ist, erhält man für die Ableitung:
$f'(x) = 4x^3 \cdot \cos x + x^4 \cdot (-\sin x) = 4x^3 \cdot \cos x - x^4 \cdot \sin x$.

Die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ lässt sich mit der **Quotientenregel** ableiten.
Mit $u(x) = 2x$, $v(x) = 1 - x$ und $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$ mit $v(x) \neq 0$ gilt für die Ableitung:
$f'(x) = \frac{2(1-x) - 2x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$.

**2** Bestimmen Sie $f'(x)$ mithilfe der Kettenregel.

a) $f(x) = \sin(2x + 1)$
b) $f(x) = 3 \cdot \cos(2x - 1)$
c) $f(x) = (\cos(x))^2$
d) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

**3** Bestimmen Sie $f'(x)$ mithilfe der Produktregel.

a) $f(x) = 2x^3 \cdot \sin(x)$
$f'(x) = 6x^2 \cdot \sin(x) + 2x^3 \cdot \cos(x)$

b) $f(x) = -\sin(x) \cdot x$
$f'(x) = -\cos(x) \cdot x + (-\sin(x))$

c) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos(x)$
$f'(x) = -\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x}$

d) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 \cdot (-\cos x)$
$f'(x) = 3x\cos(x) - \frac{3}{2}x^2\sin(x)$

**4** Bestimmen Sie $f'(x)$ mithilfe der Quotientenregel.

a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{2x-1}$
b) $f(x) = \frac{2-3x}{\cos(x)}$
c) $f(x) = \frac{x^2}{1-\sin(x)}$
d) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

**5** Bestimmen Sie $f'(x)$.

a) $f(x) = x^2 \cdot \sin(3x)$
b) $f(x) = \cos(x) \cdot \sqrt{2x}$
c) $f(x) = 5x \cdot (\cos(x))^2$
d) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin(4x + \pi)$
e) $f(x) = \frac{\cos(2x+1)}{2x-1}$
f) $f(x) = \sin(x) \cdot e^{3x}$
g) $f(x) = \frac{e^{2x}}{2\sin(2x)}$
h) $f(x) = 3 \cdot \sin(ax^2 + b)$

# Aufgabe 2)

a) $f(x) = \sin(2x+1)$
$f'(x) = 2\cos(2x+1)$

b) $f(x) = 3 \cdot \cos(2x-1)$
$f'(x) = -3\sin(2x-1) \cdot 2$
$= -6\sin(2x-1)$

c) $f(x) = (\cos(x))^2$

$u(x) = x^2$ $\quad$ $v(x) = \cos(x)$
$u'(x) = 2x$ $\quad$ $v'(x) = -\sin(x)$

$f'(x) = -2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$

d) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} = 1 \cdot \sin(x)^{-1}$
$f'(x) = -1\sin(x)^{-2} \cdot \cos(x)$
$= -\frac{\cos(x)}{(\sin(x))^2}$

3) $f(x) = 2x^3 \cdot \sin(x)$

c) $f(x) = \frac{x^2}{1-\sin(x)}$

## Buch S. 353 Nr. 8+9

8a) $f(x) = 2\sin(x)$
$f'(x) = 2\cos x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + 1$
$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin$

c) $f(x) = \sin(3x)$
$f'(x) = \cos(3x) \cdot 3$
$= 3\cos(3x)$

$u(x) = \sin(x)$ $\quad$ $v(x) = 3x$
$u'(x) = \cos(x)$ $\quad$ $v'(x) = 3$

d) $f(x) = 2\cos(\frac{1}{2}x)$

$u(x) = 2\cos x$ $\quad$ $v(x) = \frac{1}{2}x$
$u'(x) = -2\sin x$ $\quad$ $v'(x) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = -2\sin(\frac{1}{2}x) \cdot \frac{1}{2}$
$= -4\sin(\frac{1}{2}x)$

e) $f(x) = \cos(\pi x)$
$f'(x) = -\sin(\pi x)\,\pi$
$= -\pi\sin(\pi x)$

f) $f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$

$f'(x) = (\cos x)^2 - ((\sin x)^2)$

g) $f(x) = 3\sin(1-x)$

$f'(x) = 3\cos(1-x) \cdot (-1)$
$= -3\cos(1-x)$

h) $f(x) = x - \sin(1 - \frac{\pi}{2}x)$

$f'(x) = -\cos(1-\frac{\pi}{2}x) \cdot (-\frac{\pi}{2})$
$= \frac{\pi}{2}\cos(1-\frac{\pi}{2}x)$

i) $f(x) = \sin(2x) - \cos(\pi - x)$

## B. Extrempunkte und Wendepunkte trigonometrischer Funktionen

**Beispiel: Extrem- und Wendepunkte einer Sinusfunktion**

Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 1$ im Intervall $0 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie anschließend den Graphen von f.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die benötigten Ableitungen f′, f″ und f‴. Dabei verwenden wir die lineare Kettenregel, die besagt, dass $(\sin(ax))' = a \cdot \cos(ax)$ und dass $(\cos(ax))' = -a \cdot \sin(ax)$ gilt.

***Ableitungen von f:***

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \cdot 2 + 0 = \cos(2x)$

$f''(x) = -\sin(2x) \cdot 2 = -2\sin(2x)$

$f'''(x) = -2\cos(2x) \cdot 2 = -4\cos(2x)$

Zur Bestimmung der Extrempunkte lösen wir die Gleichung $f'(x) = \cos(2x) = 0$. Sie hat im Intervall $[0; \pi]$ zwei Lösungen: $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{3}{4}\pi$.

Durch Überprüfung mittels f″ erhalten wir einen Hochpunkt $H\left(\frac{\pi}{4}\middle|\frac{3}{2}\right)$ und einen Tiefpunkt $T\left(\frac{3}{4}\pi\middle|\frac{1}{2}\right)$.

***Extrempunkte von f:***

$f'(x) = \cos(2x) = 0$ (notw. Bed.)

$2x = \frac{\pi}{2}$ bzw. $2x = \frac{3}{2}\pi$

$x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{3}{2}$, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow$ Max

$x = \frac{3}{4}\pi$, $y = \frac{1}{2}$, $f''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 > 0 \Rightarrow$ Min

Hochpunkt $H\left(\frac{\pi}{4}\middle|\frac{3}{2}\right)$; Tiefpunkt $T\left(\frac{3}{4}\pi\middle|\frac{1}{2}\right)$

Als Wendestellen erhalten wir mit der notwendigen Bedingung $f''(x) = -2\sin(2x) = 0$ die Stellen $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \pi$.

Durch Überprüfung mittels f‴ ergeben sich zwei Links-Rechts-Wendepunkte $W_1(0|1)$ und $W_3(\pi|1)$ sowie ein Rechts-Links-Wendepunkt $W_2\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$.

***Wendepunkte von f:***

$f''(x) = -2\sin(2x) = 0$ (notw. Bed.)

$2x = 0$ bzw. $2x = \pi$ bzw. $2x = 2\pi$

$x = 0$ bzw. $x = \frac{\pi}{2}$ bzw. $x = \pi$

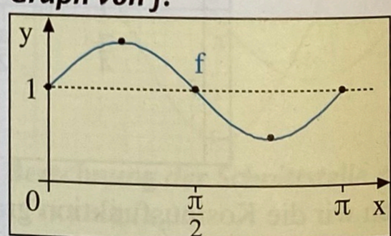
$x = 0$: $f'''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ L-R-Wp $W_1(0|1)$

$x = \frac{\pi}{2}$: $f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow$ R-L-Wp $W_2\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$

$x = \pi$: $f'''(\pi) = -4 < 0 \Rightarrow$ L-R-Wp $W_3(\pi|1)$

Durch Einzeichnen der Extrem- und Wendepunkte können wir nun den Graphen von f skizzieren. Man erkennt nun auch ohne weitere Rechnung, dass f keine Nullstellen besitzt.

***Graph von f:***




**Übung 2 Extrem- und Wendepunkte**

Untersuchen Sie f auf Extrem- und Wendepunkte und zeichnen Sie den Graphen von f.

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1, \quad 0 \le x \le 3\pi$

b) $f(x) = 2\cos x - 1, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1, \quad 0 \le x \le 4\pi$

d) $f(x) = -\sin x + 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

e) $f(x) = 2\cos x - x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

f) $f(x) = 3\sin x - 2, \quad \frac{\pi}{2} \le x \le 3\pi$

**Übung 3 Nullstellen und Extremstellen**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin x + \cos x$ im Intervall $[0; 2\pi]$. Untersuchen Sie f auf Nullstellen und Extremstellen. Skizzieren Sie den Graphen von f.

Übung 1D

## C. Steigungs- und Schnittwinkel von trigonometrischen Funktionen

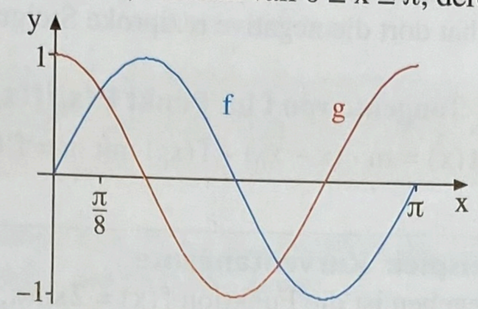
**Beispiel: Steigungswinkel, Schnittwinkel**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = \cos(2x)$ im Intervall $0 \le x \le \pi$, deren Graphen rechts abgebildet sind.

a) Zeigen Sie, dass f und g sich bei $x = \frac{\pi}{8}$ schneiden.

b) Berechnen Sie den Steigungswinkel von f an der Stelle $x = \frac{\pi}{8}$.

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel von f und g bei $x = \frac{\pi}{8}$.




Lösung zu a:
Die Berechnung von $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ und $g\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ergibt jeweils den Wert $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also schneiden sich f und g im Punkt $P\left(\frac{\pi}{8}\middle|\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

***Schnittpunkt von f und g (Nachweis):***

$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt $S\left(\frac{\pi}{8}\middle|\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Lösung zu b:
Wir bestimmen zunächst die Ableitungsfunktion $f'(x) = 2\cos(2x)$, wobei wir Sinusregel und lineare Kettenregel anwenden.
Dann berechnen wir $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$.
Dieser Steigungswert entspricht dem Tangens des Steigungswinkels $\alpha$.
Durch Anwendung des Arcus-Tangens erhalten wir das Resultat: $\alpha \approx 54{,}7°$.

***Steigungswinkel von f bei $x = \frac{\pi}{8}$:***

$f'(x) = 2\cos(2x)$

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$\tan\alpha = \sqrt{2}$

$\alpha = \arctan\sqrt{2} \approx 54{,}7°$

Lösung zu c:
Analog zu b) bestimmen wir den Steigungswinkel $\beta$ von g bei $x = \frac{\pi}{8}$. Er lautet $\beta = -54{,}7°$.
$\beta$ ist hier negativ, so dass der Schnittwinkel von f und g eigentlich laut Skizze den Wert $\alpha + |\beta| = 109{,}4°$ hätte. Da dieser Wert aber über 90° liegt, ist der Schnittwinkel gleich dem Ergänzungswinkel hiervon zu 180°.
Also gilt $\gamma = 70{,}6°$.

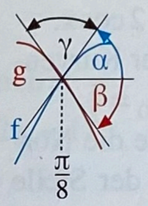
***Steigungswinkel von g bei $x = \frac{\pi}{8}$:***

$g'(x) = -2\sin(2x)$

$g'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

$\beta = \arctan(-\sqrt{2}) \approx -54{,}7°$ (bzw. $+125{,}3°$)

***Schnittwinkel von f und g:***




$\gamma = 180° - \alpha - |\beta|$, da $\beta < 0$

$\Rightarrow \gamma = 180° - 54{,}7° - 54{,}7°$

$\Rightarrow \gamma = 70{,}6°$

**Übung 4 Steigungswinkel**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ im Intervall $0 \le x \le 8$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

b) Berechnen Sie den Steigungswinkel $\alpha$ an der Stelle $x = 2$.

c) Berechnen Sie, an welcher Stelle f den Steigungswinkel $\beta = 45°$ hat.

**Übung 5 Schnittwinkel**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \sin(0{,}5x)$ und $g(x) = \cos(0{,}5x)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

b) Zeigen Sie, dass $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ gilt.

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel von f und g bei $x = \frac{\pi}{2}$.

# 5. Funktionsuntersuchungen und Modellierungen

Im Folgenden untersuchen wir trigonometrische Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ sowohl abstrakt als auch im Anwendungszusammenhang.

## A. Abstrakte Kurvenuntersuchungen

**Beispiel: Sinuskurve**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ für $1 \le x \le 5$.

a) Bestimmen Sie x- und y-Verschiebung, Periode und Amplitude. Zeichnen Sie den Graphen. Lesen Sie dann aus dem Graphen die Nullstellen, die Hoch- und Tiefpunkte sowie den Wendepunkt in Annäherung ab.

b) Weisen Sie nach, dass $H(2|2{,}5)$ und $T(4|-0{,}5)$ tatsächlich die Extrempunkte von f sind.

Lösung zu a:

Wir formen die Gleichung von f so um, dass wir ablesen können, welche Manipulationen erforderlich sind, um den Graphen von f aus dem Graphen von $\sin x$ zu gewinnen.

$f(x) = 1{,}5 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(x - 1)\right] + 1$

x-Verschiebung: $+1$

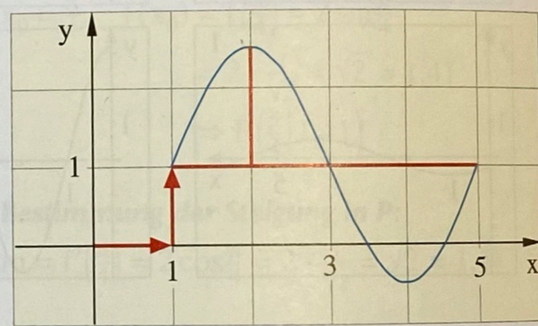
y-Verschiebung: $+1$

Periode: $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Amplitude: $1{,}5$

Anhand dieser Daten skizzieren wir den Graphen von f und lesen die rechts dargestellten besonderen Punkte ab.

**1. *Graph von f:***




Nullstellen: $x_1 \approx 3{,}5$; $x_2 \approx 4{,}5$

Extrempunkte: $H(2|2{,}5)$; $T(4|-0{,}5)$

Wendepunkt: $W(3|1)$

Lösung zu b:

Wir führen den Nachweis für die beiden Extrempunkte mit Hilfe der beiden ersten Ableitungen von f, die wir mit der Sinusregel, der Kosinusregel und der linearen Kettenregel bestimmen können.

Dann zeigen wir, dass $f'(2) = 0$ und $f''(2) < 0$ gilt, womit der Nachweis für den Hochpunkt erbracht ist.

Analog führen wir mittels $f'(4) = 0$ und $f''(4) > 0$ den Nachweis für den Tiefpunkt.

**2. *Nachweise zu den Extrempunkten:***

$f'(x) = 1{,}5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -1{,}5 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

Hochpunkt: $f'(2) = 1{,}5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f''(2) = -1{,}5 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -3{,}7 < 0 \Rightarrow \text{Max}$

Tiefpunkt: $f'(4) = 1{,}5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$

$f''(4) = -1{,}5 \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \approx 3{,}7 > 0 \Rightarrow \text{Min}$

**Übung 1**

Skizzieren Sie den Graphen von f im angegebenen Intervall und bestimmen Sie die Lage der Extrem- und Wendepunkte sowie die Nullstellen von f.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - 4) + 1,\ 2 \le x \le 2 + \pi$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) - 1,\ 2 \le x \le 6$

c) $f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 2\pi\right) + 2,\ 4 \le x \le 8$

d) $f(x) = -2 \cdot \sin(x - 2) + 1,\ 2 \le x \le 2 + 2\pi$

8,28

1d) $f(x) = -2 \cdot \sin(x-2) + 1$ $\qquad 2 \leq x \leq 2+2\pi$

$0 = -2\sin(x-2) + 1 \quad | -1$

$-1 = -2\cdot\sin(x-2) \quad | :(-2)$

$\frac{1}{2} = \sin(x-2) \quad$ | Substitution

$\frac{1}{2} = \sin(u) \quad$ | arcsin

$\frac{\pi}{6} = u$

$\pi - u = u'$

$\pi - \frac{\pi}{6} = u'$

$\frac{5}{6}\pi = u'$

$x-2 = \frac{5}{6}\pi \quad | +2$

$x \approx 4{,}62$

$x - 2 = \frac{\pi}{6} \quad | +2$

$x \approx 2{,}52$

notw. Bed: $f'(x) = 0$

$0 = -2\cdot\cos(x-2) \quad | :(-2)$

$0 = \cos(x-2) \quad$ | Substitution

$0 = \cos(u) \quad$ | arccos

$\frac{1}{2}\pi = u$ Resubstitution

$\frac{1}{2}\pi = x-2 \quad | +2$

$3{,}57 \approx x$

hinr. Bed: $f'(x)=0;\ f''(x) \neq 0$

$f''(3{,}57) = 2\sin(3{,}57-2)$

$\approx 2 \quad > 0 \rightarrow$ Minimum $T(3{,}57 | -1)$

$2 + \frac{\pi}{2} + \pi = 2 + \frac{3}{2}\pi$

6,71

$H(2+\frac{3}{2}\pi | 3)$

notw. Bed: $f''(x)=0$

$0 = 2\sin(x-2) \quad | :2$

$0 = \sin(x-2) \quad$ | S.

$0 = \sin(u) \quad$ | arcsin

$0 = u$

$\pi - u'$

$x - 2 = \pi \quad | +2$

$x \approx 5{,}14$

$x - 2 = 0 \quad | +2$

$x = 2$

hinr. Bed: $f''(x) = 0;\ f'''(x) \neq 0$

5,14

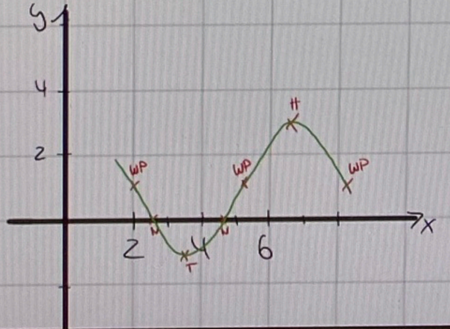
$f'''(\pi+2) = 2\cos(\pi+2-2)$

$= -2 \neq 0 \rightarrow WP(\pi+2 | 1)$

$f'''(2) = 2\cos(2-2)$

$= 2 \neq 0 \rightarrow WP(2|1)$

$WP(2\pi+2 | 1)$



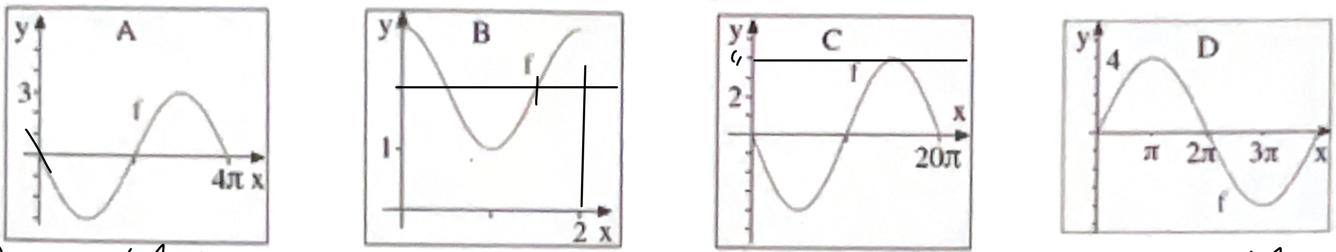
| Name: Datum: | Trigonometrische Funktionen und Funktionenscharen | MA 11 | |
|---|---|---|---|

**Basisaufgaben:** Lehrbuch S. 366/367

$p = \frac{2\pi}{b}$ $b = \frac{2\pi}{p}$

**7. Graphen**

Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung der abgebildeten Funktion f an.




$f(x) = -3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ $f(x) = \cos(\pi x) + 2$ $f(x) = -4\sin(0{,}1\ x)$ $f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

**11. Atmungsrhythmus**

Ein Patient atmet im Abstand von drei Sekunden tief ein und aus. Dabei schwankt sein Lungenvolumen f zwischen 2 und 4 Litern. Zu Beginn (t = 0) hat er gerade eingeatmet. Hochpunkt

sin cos vorfaktor ±1

Prüfen Sie, welche der folgenden Formeln sein Lungenvolumen korrekt beschreiben könnte.

werte passen nicht

a) $f(t) = 3 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$ ✓ ~~b)~~ $\cancel{f(t) = 4 - 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}$ ~~c)~~ $\cancel{f(t) = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{3}(t+3)\right)}$

~~d)~~ $\cancel{f(t) = 3 - \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}$ ~~e)~~ $\cancel{f(t) = 3 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}$ ≙ a f) $f(t) = 3 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\left(t + \frac{3}{4}\right)\right)$ ✓

Verschiebung ↑ aus sin wird cos

$= 3 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

**Aufgabe 1 Funktionenschar**

Gegeben sei die Funktionenschar $f_a$ mit $f_a(x) = 2 - \frac{1}{a}\sin(x)$, $a > 0$.

a. Erläutern Sie argumentativ oder rechnerisch, für welche Werte von a, die Funktion $f_a$ Nullstellen besitzt.

$H\left(\frac{\pi}{2a} \middle| a\right)$ $T\left(\frac{3\pi}{2a} \middle| -a\right)$

b. Stellen Sie die Gleichung der Normalen $q_a$ von $f_a$ im Punkt $P(\pi|f_a(\pi))$ auf.

*Kontrollergebnis:* $q_a(x) = -ax + 2 + a\pi$

**Aufgabe 2 Funktionenschar**

Gegeben sei die Funktionenschar $f_a$ mit $f_a(x) = x + \frac{a}{2} \cdot \sin(2x)$, $a > 0$.

a. Bestimmen Sie Lage und Art aller Extrema von $f_2$ auf dem Intervall $I = [0; 2\pi]$.

b. Zeigen Sie:

Für $a \geq 1$ gibt es Stellen mit einer waagerechten Tangente, also potenzielle Extrema.

Für $a < 1$ gibt es keine solchen Stellen und damit keine Extrema.

c. Bestimmen Sie die Wendestellen von $f_a$ auf $I$. Verzichten Sie auf den Nachweis ihrer Existenz.

d. Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente $t_a$ von $f_a$ an der Stelle $x = \pi$.

*Kontrollergebnis:* $t_a(x) = (1 + a)x - a\pi$

e. Die Wendetangente $t_a$ aus Teil d) umschließt für $a > 0$ mit den beiden Koordinatenachsen ein Flächenstück $A_a$. Geben Sie einen Term für diesen Flächeninhalt an.

Berechnen Sie den Wert von a, für den der Inhalt des Flächenstücks $A_a$ exakt $2\pi^2$ beträgt.

f. Zeigen/Begründen Sie: Für $a = 4$ hat die Funktion $f_a$ außer der Nullstelle $x = 0$ keine weiteren Nullstellen.

a) $f_a(x) = 2 - \frac{1}{a}\sin(x)$ , $a>0$

$$0 = 2 - \frac{1}{a}\sin(x) \quad \Big| + \frac{1}{a}\sin(x)$$
$$2 = \frac{1}{a}\sin(x) \quad \Big| \cdot a$$
$$2 \cdot a = \sin(x) \quad \Big| \arcsin(x)$$

$\downarrow$

$-1 \leq 2a \leq 1$ $\quad$ $a \leq \frac{1}{2}$

$f_a(\pi) = 2$

1b) $P(\pi \mid f_a(\pi))$

$f_a(x) = 2 - \frac{1}{a}\cdot\sin(x)$

$f_a'(x) = -\frac{1}{a}\cos(x)$

$f_a'(\pi) = -\frac{1}{a}\cdot\cos(\pi)$

$= \frac{1}{a}$

$f_a'(x) = \frac{1}{a}\cos(x)$

$\mathrm{I}\ m_q = -\frac{1}{f'(x_0)}$

$= -\frac{1}{\frac{1}{a}} \quad \Big| \cdot a$

$\boxed{= -a}$

$\mathrm{I}\ m = \frac{1}{f'(x_0)}$

$y = mx + n$

$f_a(\pi) = -a\pi + n$

$\boxed{2 + a\pi = n}$

$q(x) = -ax + 2 + a\pi$

---

2) $f_a(x) = x + \frac{a}{2}\cdot\sin(2x)$ , $\quad a>0$

$f(x) = \sin(2x)$

$f'(x) = 2\cos(2x)$

$f_a'(x) = 2\cos(2x)$